Уравнение Пелля

Пусть дано натуральное число m, не являющееся полным квадратом. *Уравнением Пелля* называется уравнение $x^2 - my^2 = 1$. Мы будем искать решения, отличные от тривиальных решений $(\pm 1, 0)$. Пару $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ отождествим с точкой на плоскости $\mathbb{R}^2$ и числом $x + \sqrt{m}y \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$. Для каждого целого числа n рассмотрим фигуру ℓ_n, заданную уравнением $x^2 - my^2 = n$. Ясно, что все ℓ_n, $n \neq 0$, – гиперболы, а ℓ_0 – пара общих асимптот этих гипербол.

1. Выберем на ℓ_n пару симметричных относительно начала координат точек. Докажите, что на ℓ_{-n} можно выбрать такую пару симметричных относительно начала координат точек, что все четыре выбранные точки – вершины параллелограмма со сторонами, параллельными ℓ_0, и, более того, площадь этого параллелограмма зависит только от n.
2. Опишите геометрически, как на гиперболе ℓ_n, $n \neq 0$, действует умножение на положительное решение. Ответьте на этот вопрос для пары асимптот ℓ_0.
3. Докажите, что все положительные решения (если они есть) получаются многократным умножением некоторого положительного решения на себя.
4. Пусть на гиперболе ℓ_n лежат хотя бы $|n|^2 + 1$ целых точек. Докажите, что уравнение Пелля имеет решение.
5. Докажите, что на некоторой гиперболе ℓ_n лежит бесконечно целых точек.
6. Пусть p – простое число вида $4k + 1$, а $d^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Докажите, что число p представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, рассмотрев на координатной плоскости решётку с базисными векторами $(1, 0)$, $(\frac{d}{p}, 1)$ и эллипс, заданный уравнением $px^2 + \frac{y^2}{p} = 1$.
7. Докажите, что числа $x, y \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ удовлетворяют уравнению $x^2 - nxy + y^2 = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда x и y — соседние числа последовательности, заданной соотношениями $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $a_{k+1} = ma_k - a_{k-1}$.
8. Пусть S — множество всех натуральных чисел n таких, что n^4 делится хотя бы на одно из чисел $n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+2n$. Докажите, что среди элементов множества S бесконечно много чисел каждого из видов $7m$, $7m + 1$, $7m + 2$, $7m + 5$, $7m + 6$ и нет ни одного числа вида $7m + 3$ и $7m + 4$, где m — целое.
9. Даны целые числа x и $y = 2 + 2\sqrt{28x^2 + 1}$. Докажите, что y — полный квадрат.
10. Натуральное число n таково, что оба числа: $3n + 1$ и $4n + 1$ — полные квадраты. Докажите, что n делится на 56.
11. Целые числа x, y, n и удовлетворяют равенству $x^2 - (n^2 - 1)y^2 = a$, где $0 < a \leqslant 2n + 1$. Докажите, что число a является полным квадратом.
12. Найдите все натуральные числа d, для которых у уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$ есть решение (x, y) такое, что $x - y = d$.
13. Докажите, что для любого простого числа $p \equiv 1 \pmod 4$ у уравнения $x^2 - py^2 = -1$ есть решения в натуральных числах.
14. Найдите все натуральные числа d, для которых существуют многочлены $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ такие, что $\deg P = d$ и $(P(x))^2 + 1 = (x^2 + 1)(Q(x))^2$.